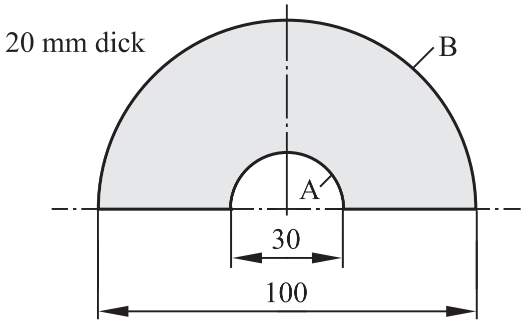
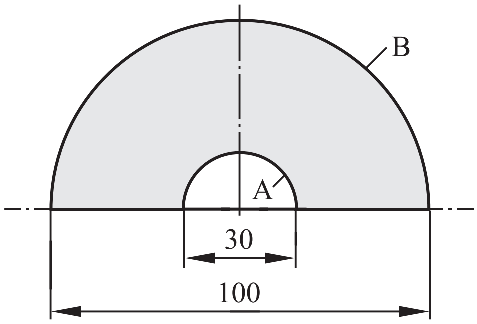
3 Zeitkonstante Felder

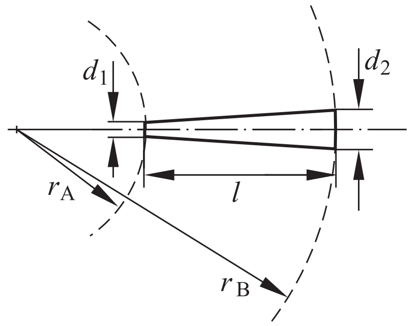
Aufgabe 3.12
Der Bügel hat die Leitfähigkeit 25 S/m. Berechnen Sie den Widerstand zwischen den Flächen A und B.



Aufgabe 3.13
Das Material zwischen den beiden Halbkugeln A und B hat die Leitfähigkeit 25 S/m. Berechnen Sie den Widerstand zwischen den Halbkugelflächen.

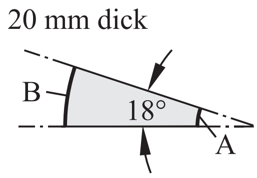


Aufgabe 3.14
Ein 10 cm langer Kegelstumpf aus Chromnickel Ni80Cr20 hat am einen Ende den Durchmesser $d_1 = 4$ mm und am anderen den Durchmesser $d_2 = 10$ mm. Die Äquipotenzialfläche beim Durchmesser d_1 ist ein Kugelsegment mit dem Radius $r_A = 66{,}7$ mm; die Äquipotenzialfläche beim Durchmesser d_2 ist ein Kugelsegment mit dem Radius $r_B = 166{,}74$ mm. Welchen Widerstand R hat der Kegelstumpf zwischen den beiden Äquipotenzialflächen?

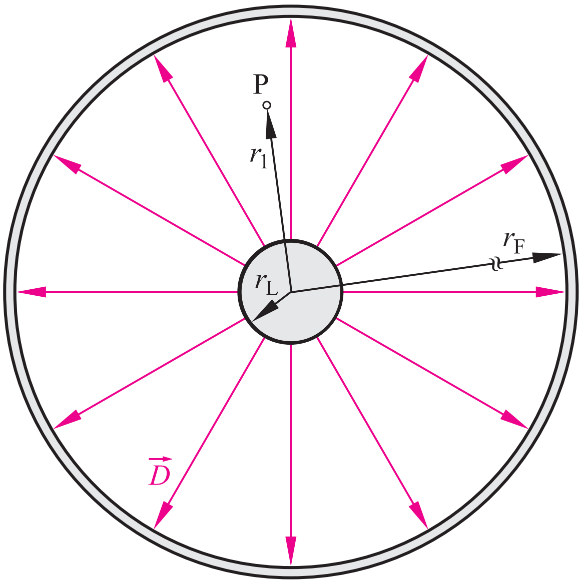


⚠ Bei dieser Aufgabe liegt es nahe, die Lösung dadurch zu vereinfachen, dass man den Widerstand eines Zylinders mit dem mittleren Durchmesser 7 mm berechnet (s. Aufgabe 1.11). Lassen Sie sich nicht auf diesen Irrweg locken, der zu einer falschen Lösung führt.

Aufgabe 3.15
Aus dem Bügel der Aufgabe 3.12 wird ein Teilstück ausgeschnitten. Berechnen Sie den Widerstand zwischen den Flächen A und B.

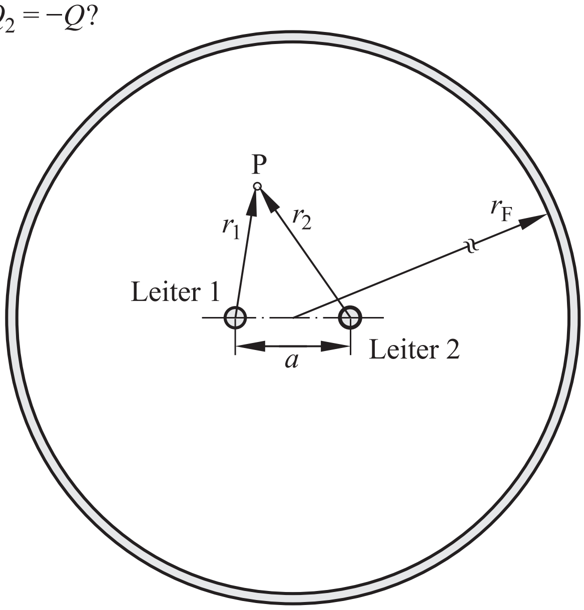


Aufgabe 3.16
Eine Doppelleitung besteht aus zwei zylindrischen Leitern mit dem Durchmesser d_L, deren Achsen den Abstand a aufweisen. Beide Leiter befinden sich innerhalb eines Fernzylinders mit dem Radius $r_F \gg a$, dem das Potenzial $\varphi_F = 0$ zugeordnet wird.
Im Gegensatz zum Radius der Fernkugel (s. Abschn. 3.2.4) hat der Radius r_F des Fernzylinders einen endlichen Wert.
1) Zunächst trage lediglich der Leiter 1, den wir koaxial zum Fernzylinder angeordnet annehmen, die Ladung Q_1. Welches Potenzial φ_1 hat der Punkt P im Abstand r_1 von der Achse?



2) Im Folgenden trage lediglich der Leiter 2, den wir koaxial zum Fernzylinder angeordnet annehmen, die Ladung Q_2. Welches Potenzial φ_2 hat der Punkt P im Abstand r_2 von der Achse?

3) Die beiden Leiter 1 und 2 werden jeweils um die Strecke $a/2 \ll r_F$ versetzt. Das Potenzial φ_P ist dabei die Summe der in 1) und 2) berechneten Potenziale. Welches Potenzial hat der Punkt P für $Q_1 = +Q$ und $Q_2 = -Q$?



4) Welches Potenzial φ_{L1} hat der Punkt P für $Q_1 = +Q$ und $Q_2 = -Q$, wenn er auf der Oberfläche des Leiters 1 liegt, wo $r_1 = r_L$ und $r_2 \approx a$ ist?

5) Welches Potenzial φ_{L2} hat der Punkt P für $Q_1 = +Q$ und $Q_2 = -Q$, wenn er auf der Oberfläche des Leiters 2 liegt, wo $r_1 \approx a$ und $r_2 = r_L$ ist?

6) Berechnen Sie mit der Spannung $U = \varphi_{L1} - \varphi_{L2}$ die Kapazität der Doppelleitung in Luft für die Permeabilitätszahl $\varepsilon_r = 1$.

Lösung 3.12

Wir denken uns den Körper in viele dünne Halbzylinder mit der Dicke dr zerlegt. Jeder Halbzylinder der Höhe h = 20 mm hat den Widerstand:

$$\mathrm{d}R = \frac{\mathrm{d}r}{\gamma A} = \frac{\mathrm{d}r}{\gamma\,\pi\,h\,r}$$

Die Halbzylinder zwischen den Elektroden A und B liegen in Reihe. Der Widerstand der Anordnung mit den Radien r_A = 15 mm und r_B = 50 mm ist:

$$R = \int_{r_A}^{r_B} \mathrm{d}R = \frac{\ln \frac{r_B}{r_A}}{\gamma\,\pi\,h} = 0{,}766\ \Omega$$

Lösung 3.13

Wir denken uns den Körper in viele dünne Kugelschichten mit der Dicke dr zerlegt. Jede dieser Kugelschichten hat die Querschnittsfläche $A = 2\,\pi\,r^2$. Damit hat jede Kugelschicht den Widerstand:

$$\mathrm{d}R = \frac{\mathrm{d}r}{\gamma A} = \frac{\mathrm{d}r}{2\pi\,\gamma\,r^2}$$

Die Kugelschichten zwischen den Elektroden A und B liegen in Reihe. Der Widerstand der Anordnung mit den Radien r_A = 15 mm und r_B = 50 mm ist:

$$R = \int_{r_A}^{r_B} \mathrm{d}R = \frac{1}{2\pi\,\gamma}\left(\frac{1}{r_A} - \frac{1}{r_B}\right) = 0{,}297\ \Omega$$

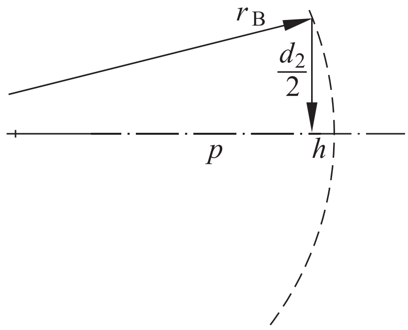
Lösung 3.14

Wie in der Aufgabe 3.13 berechnen wir zunächst den Widerstand zwischen den beiden Halbkugeln mit den Radien r_A und r_B und setzen dabei für die Leitfähigkeit den Wert $\gamma = 0{,}91\ \mathrm{S\,m/mm^2}$ (Tab. 1.3) ein:

$$R_{\text{Halbkugel}} = \int_{r_A}^{r_B} \mathrm{d}R = \frac{1}{2\pi\gamma}\left(\frac{1}{r_A} - \frac{1}{r_B}\right) = 1{,}5732\ \mu\Omega$$

Die Äquipotenzialfläche des Kegelstumpfes ist eine Kugelkappe, die eine wesentlich kleinere Fläche als die Halbkugel hat. Beim Radius r_B gilt:

$$A_{\text{Kugelkappe}} = 2\,\pi\, r_B\, h$$



Die Höhe h der Kugelkappe beim Radius r_B berechnen wir mit $r_B = p + h$ und $p^2 + (d_2/2)^2 = r_B^2$:

$$h = r_B - \sqrt{r_B^2 - \left(\frac{d_2}{2}\right)^2} = 0{,}075\ \mathrm{mm}$$

Das Verhältnis der Flächen von Halbkugel und Kugelkappe hat bei jedem Radius $r_A \le r \le r_B$ denselben Wert; wir berechnen es für den Radius $r = r_B$:

$$\frac{A_{\text{Halbkugel}}}{A_{\text{Kugelkappe}}} = \frac{2\pi r_B^2}{2\pi r_B h} = 2223{,}2$$

Damit berechnen wir den gesuchten Widerstand:

$$R_{\text{Kugelkappe}} = R_{\text{Halbkugel}} \cdot \frac{A_{\text{Halbkugel}}}{A_{\text{Kugelkappe}}} = 3{,}5\ \mathrm{m\Omega}$$

Lösung 3.15

Die Anordnung hat 10 % der Fläche des Halbzylinders in der Aufgabe 3.12. und damit beträgt der Leitwert G_{Aus} des Ausschnitts nur 10 % des in der Lösung 3.12 berechneten Leitwerts $G = 1\,/\,R = 1\,/\,(0{,}766\ \Omega)$. Damit gilt:

$$R_{\text{Aus}} = 10\ R = 7{,}66\ \Omega$$

Lösung 3.16

1) Entsprechend Gl. (3.36) berechnen wir das Potenzial des Punktes P:

$$\varphi_1 = U_{1F} = \int_{r_1}^{r_F} \vec{E} \cdot \mathrm{d}\vec{r} = \frac{Q}{\varepsilon_r\,\varepsilon_0 \cdot 2\,\pi\, l} \cdot \ln\frac{r_F}{r_1}$$

2) Durch Verändern der Indizes ergibt sich:

$$\varphi_2 = U_{2F} = \int_{r_2}^{r_F} \vec{E} \cdot \mathrm{d}\vec{r} = \frac{Q}{\varepsilon_r\,\varepsilon_0 \cdot 2\,\pi\, l} \cdot \ln\frac{r_F}{r_2}$$

3) Der Punkt P liegt auf dem Potenzial:

$$\varphi_P = \varphi_1 + \varphi_2 = \frac{Q}{\varepsilon_r\,\varepsilon_0 \cdot 2\,\pi\, l} \cdot \ln\frac{r_2}{r_1}$$

4) Der Leiter 1 hat das Potenzial:

$$\varphi_{L1} = \frac{Q}{\varepsilon_r\,\varepsilon_0 \cdot 2\,\pi\, l} \cdot \ln\frac{a}{r_L}$$

5) Der Leiter 2 hat das Potenzial:

$$\varphi_{L2} = \frac{-Q}{\varepsilon_r\,\varepsilon_0 \cdot 2\,\pi\, l} \cdot \ln\frac{a}{r_L}$$

6) Mit der Spannung $U = \varphi_{L1} - \varphi_{L2}$ berechnen wir die Kapazität C der Doppelleitung:

$$C = \frac{Q}{U} = \frac{\varepsilon_0 \cdot \pi\, l}{\ln\frac{a}{r_L}}$$